Lineare Algebra
Lektion 5 KW42

(B) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 13 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 9 & 13 \end{bmatrix} = LU$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 13 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 9 & 13 \end{matrix} \xrightarrow{\substack{\text{Zeilen-}\\\text{tausch}\\P_{12}}} \begin{matrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 13 \\ 2 & 9 & 13 \end{matrix} \xrightarrow{E_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \begin{matrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{\substack{\text{Zeilen-}\\\text{tausch}\\P_{23}}} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 13 \end{matrix}}_{U}$$

$$P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Zeilentauschoperationen vorweg:

$$\underbrace{P_{23} P_{12}}_{} A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 9 & 13 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix} = A'$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A' = PA = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{L\\(E_{21}^{-1})}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}}_{U}$$

Lineare Algebra

Lektion 5 KW4

Permutationsmatrix $P =$ I mit vertauschten Zeilen

Wieviele gibt es? (Format $n \times n$)

Antwort: $n!$

(B) $n=3$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{I}, \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

Inverse? $\qquad P^{-1} = P^T$

(B) $n=3$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^T}_{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^T}_{\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}} \begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Transposition: $(A^T)_{ij} = A_{ji}$

B $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Symmetrische Matrizen sind $n \times n$-Matrizen A
mit $A^T = A$

B $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Regeln: $(AB)^T = B^T A^T$

$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

$(A^T)^T = A$

B wie man symmetrische Matrizen bekommt:

R beliebig: $R^T R$ symmetrisch

denn $(R^T R)^T = R^T (R^T)^T$
$= R^T R$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Permutations-} \\ \text{matrix}}}{P}A = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{auf der} \\ \text{Diagonalen} \\ \text{stehen 1en}}}{L}\ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hier nicht!}}}{U}$$

$$= L\ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Diagonal-} \\ \text{matrix}}}{D}\ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hier schon!}}}{U'}$$

B (von vorhin)

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 9 & 13 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix} = \underset{L}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{U}{\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}}$$

$$= \underset{L}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{D}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}} \underset{U'}{\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\underbrace{(PA)^T}_{A^T P^T} = \underset{U'^T}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \end{bmatrix}} \underset{D^T}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}} \underset{L^T}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$