

# Lineare Algebra (IFB1A,IFB1B,IFS1), Prüfung, mit Lösungen

M.Gruber

30.Januar 2008, 08:30–10:00, R0.058, R1.008, R2.007 (106)

Name:
Vorname:
Matrikelnummer:

9 Aufgaben. Es können 90 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen sind 30 Punkte erforderlich.

1. Sei  $A$  eine Matrix, die durch die üblichen Zeilenoperationen in die Form

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

gebracht werden kann.

- (a) Geben Sie eine Basis des Nullraums von  $A$  an.

*Lösung* Mit dem üblichen Ansatz (Nullen und Einsen an die "richtigen" Stellen setzen, restliche Komponenten ausrechnen) erhält man die Vektoren  $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

Eine Basis des Nullraums ist  $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

5 P.

- (b) Geben Sie eine partikuläre Lösung des Problems

$$Ax = \text{Summe der Spalten von } A$$

an, deren erste Komponente gleich 0 ist.

*Lösung*  $x_{\text{allgemein}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

Mit  $c_1 = 1, c_2 = 0$  erhält man  $x_{\text{partikulär}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

$x_{\text{partikulär}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

5 P.

2. Sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Gesucht sind die LU-Zerlegungen von  $A$  und  $A^T$ .

(a) LU-Zerlegung von  $A$ :  $A = LU$

*Lösung* Zur Matrix  $U$  kommt man durch die Umformungsschritte

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Damit hat man (sogar) eine  $LDU$ -Zerlegung

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

die den Vorteil hat, dass man durch Transponieren sofort zur LU-Zerlegung von  $A^T$  kommt:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = L'U'.$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{bmatrix} \quad 2.5 \text{ P.}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 2.5 \text{ P.}$$

(b) LU-Zerlegung von  $A^T$ :  $A^T = L'U'$

$$L' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 2.5 \text{ P.}$$

$$U' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 2.5 \text{ P.}$$

3. Ich habe folgenden Mathematica-Output erhalten:

```
In[2]:= NullSpace[A]
Out[2]= {{2, -5, -4, 5, -1, 0, 1}, {3, -9, 5, 0, -1, 1, 0}}
In[3]:= NullSpace[Transpose[A]]
Out[3]= {}
```

*Lösung* Der Nullraum von  $A$  hat eine Basis aus zwei Vektoren, hat also die Dimension zwei. Die Vektoren der Nullraumbasis haben sieben Komponenten, also hat  $A$  sieben Spalten. Der Zeilenraum von  $A$  hat Dimension fünf, nämlich Spaltenzahl minus Nullraumdimension. Damit ist auch der Rang von  $A$  und die Dimension des Spaltenraums fünf. Der Nullraum von  $A^T$  hat eine leere Basis, er besteht also nur aus dem Nullvektor und hat Dimension null.

(a) Welche Dimension hat der Spaltenraum von  $A$ ?

$$\dim C(A) = \boxed{5} \quad 2 P.$$

(b) Welche Dimension hat der Nullraum von  $A$ ?

$$\dim N(A) = \boxed{2} \quad 2 P.$$

(c) Welche Dimension hat der Zeilenraum von  $A$ ?

$$\dim C(A^T) = \boxed{5} \quad 2 P.$$

(d) Welche Dimension hat der linke Nullraum von  $A$ ?

$$\dim N(A^T) = \boxed{0} \quad 2 P.$$

(e) Welchen Rang hat  $A$ ?

$$\text{rank } A = \boxed{5} \quad 2 P.$$

4. Finden Sie eine Matrix  $A$ , die die Eigenwerte  $\lambda_1 = 2$  und  $\lambda_2 = 3$  mit zugehörigen Eigenvektoren  $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  und  $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$  hat.

*Lösung*

$$S = SAS^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$A = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}} \quad 10 P.$$

5. Die Vektoren

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

sollen orthogonalisiert werden. Wie man sieht, sind  $A$  und  $B$  schon orthogonal. Welches  $C$  erhält man mit Gram-Schmidt? (Normierung auf 1 ist nicht verlangt.)

*Lösung*

$$\begin{aligned} C &= c - \frac{A^T c}{A^T A} A - \frac{B^T c}{B^T B} B \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1/6 \\ -1/6 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1/6 \\ -1/6 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 10 P.$$

6. Sei

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Wie lautet der Projektor  $P$  auf den Spaltenraum von  $A$ ?

*Lösung*  $A$  ist singulär und zur Konstruktion eines Projektors nicht geeignet. Stattdessen betrachte  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .  $B$  hat den gleichen Spaltenraum wie  $A$ , hat aber maximalen Spaltenrang. Ein Projektor, der auf den Spaltenraum von  $B$  projiziert, projiziert auch auf den Spaltenraum von  $A$ .

$$\begin{aligned} P &= B(B^T B)^{-1} B^T \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 5/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 5/6 & 1/3 & -1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/6 & 1/3 & 5/6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$P = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad 5 P.$$

(b) Welchen Rang hat  $P$ ?

*Lösung* Der Rang des Projektors ist die Dimension seines Bildraumes.

$$\text{rank } P = \boxed{2} \quad 2 P.$$

(c) Welche Eigenwerte hat  $P$ ?

*Lösung* Jeder Projektor hat nur 0 und 1 als Eigenwerte. Da der Bildraum unseres Projektors zweidimensional ist, hat er den Eigenwert 1 doppelt.

$$\text{Eigenwerte: } \boxed{1, 1, 0} \quad 3 P.$$

7. Gegeben sind die  $(t, y)$ -Wertepaare  $(0, 3), (2, 4), (4, 3)$ . Sie sollen nach der *Methode der kleinsten Quadrate* durch eine Gerade der Form  $C + Dt$  gefittet werden.

*Lösung*

Im Idealfall erfüllen die Koeffizienten  $C, D$  die Gleichung

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Die Gleichung hat aber keine Lösung, da ihre rechte Seite nicht im Spaltenraum der Systemmatrix liegt. Ersatzweise lösen wir

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix},$$

also

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Wir erhalten als Komponenten der Näherungslösung  $D = 0, C = 10/3$ .

(a) Wie lauten  $C$  und  $D$ ?

$$C, D = \boxed{10/3, 0} \quad 5 P.$$

(b) Wie groß ist die Summe der kleinsten Quadrate?

*Lösung* Die Summe der kleinsten Quadrate ist die Länge des Fehlervektors "rechte Seite minus Systemmatrix mal Näherungsvektor" zum Quadrat, also

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10/3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} 10/3 \\ 10/3 \\ 10/3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\|^2 = 2/3.$$

$$\text{Summe der kleinsten Quadrate} = \boxed{2/3} \quad 5 P.$$

8. Hasenpopulation  $h(t)$  und Fuchspopulation  $f(t)$  eines Biotops entwickeln sich nach

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} h &= \frac{1}{3}h - \frac{1}{3}f \\ \frac{d}{dt} f &= h - f \end{aligned}$$

(a) Wie lauten die Eigenwerte der Systemmatrix?

*Lösung* Die Systemmatrix ist  $\begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ . Sie hat die Eigenwert 0 (da sie singular ist) und  $-2/3$  (den Wert ihrer Spur).

$$\lambda_1, \lambda_2 = \boxed{-2/3, 0} \quad 3 P.$$

(b) Geben Sie zugehörige Eigenvektoren an.

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 = \boxed{\begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \quad 3 P.$$

- (c) Sei  $h(0) = 30$  und  $f(0) = 12$ . Welches Gleichgewicht stellt sich ein, d.h. welcher Wert ergibt sich für  $\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} h(t) \\ f(t) \end{bmatrix}$ ?

*Lösung* Der Anfangswerte-Vektor hat die Eigenvektordarstellung  $\begin{bmatrix} 30 \\ 12 \end{bmatrix} = 39 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 27 \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Die Lösungsfunktion lautet daher  $\begin{bmatrix} h(t) \\ f(t) \end{bmatrix} = 39 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 27e^{-(2/3)t} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Sie hat den Grenzwert  $\begin{bmatrix} 39 \\ 39 \end{bmatrix}$ .

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} h(t) \\ f(t) \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 39 \\ 39 \end{bmatrix}} \quad 4 P.$$

9. Gegeben ist die Markov-Matrix

$$M = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Der Eigenwert  $\lambda_1 = 1$  ist einfach.

- (a) Wie lauten die Eigenwerte  $\lambda_2$  und  $\lambda_3$ ?

*Lösung*  $\text{trace } M = 1/2$ ,  $\det M = 1/4$ . Für die restlichen beiden Eigenwerte hat man also die quadratische Gleichung  $\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4} = 0$ . Sie hat zwei konjugiert komplexe Lösungen. Diese sind die restlichen beiden Eigenwerte.

$$\lambda_2, \lambda_3 = \boxed{(1/4)(-1 + \sqrt{3}i), (1/4)(-1 - \sqrt{3}i)} \quad 4 P.$$

- (b) Berechnen Sie das Produkt  $\lambda_2 \lambda_3$ .

$$\lambda_2 \lambda_3 = \boxed{1/4} \quad 3 P.$$

- (c) Geben Sie einen Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_1 = 1$  an.

$$\mathbf{x}_1 = \boxed{\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}} \quad 3 P.$$