Aufgabenblatt 6: Rentenversicherung I

Lösung

Aufgabe 1: Interne Verzinsung des Umlageverfahrens

a)

- Budgetausgleich der GRV $\qquad N_t^y B_t = N_t^P P_t \qquad (1)$

  Wobei $\qquad N_t^y = N_{t+1}^P \qquad (2)$

- Beitragszahlungen der jungen Generation zum Zeitpunkt t stehen Rentenansprüche in Höhe von P_{t+1} in der nächsten Periode gegenüber.

  → Interne Rendite i_{t+1} dieses „Investitionsprojekts“:

$$B_t \equiv \frac{P_{t+1}}{1+i_{t+1}} \qquad (3)$$

  → Hieraus als interne Verzinsung:

$$1+i_{t+1} = \frac{P_{t+1}}{B_t} \qquad (4)$$

  Mit (1) folgt: $\qquad 1+i_{t+1} = \frac{N_{t+1}^y B_{t+1}}{N_{t+1}^p B_t} \qquad (5)$

  → Erster Term auf der rechten Seite: Anwachsen der Bevölkerung

  Zweiter Term: Anstieg der Beiträge (pro Versichertem)

- Unter Annahme eines konstanten Beitragssatz *b*, der auf die Löhne *w* der jeweiligen Periode erhoben wird: $B_t = bw_t$ und $B_{t+1} = bw_{t+1}$

$$1+i_{t+1} = \frac{N_{t+1}^y w_{t+1}}{N_{t+1}^P w_t} \qquad (6)$$

- Aaron (1966) Bedingung: $\qquad i_{t+1} = (1+n_{t+1})(1+g_{t+1})-1 \qquad (7)$

  Mit n_{t+1}: Wachstumsrate der Bevölkerung und g_{t+1}: Wachstumsrate der Löhne

Bzw. in zeitkontinuierlicher Form $$i = n + g \tag{8}$$

➔ Wachstumsrate der Beitragszahlungen (gleich der Lohnsummenwachstumsrate bei konstanten Beitragssätzen) bestimmen die interne Rendite des Umlageverfahrens

b) Rente ergibt sich aus: Rente = Beiträge ·Verzinsung

$$R_t = 250€(1 + i_t)$$

Interne Verzinsung (bei b=const.) ergab sich aus:

$$1 + i_{t+1} = \frac{N_{t+1}^{y} w_{t+1}}{N_{t+1}^{P} w_t}$$
$$1 + i_{t+1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} = 4$$

• zu erwartende Rente: $R_t = 250€(1 + i_t) = 250€ \cdot 4 = 1.000€$

c) Zwei Szenarien

1) real fixierte Beiträge

$$1 + i_{t+1} = \frac{N_{t+1}^{y} B_{t+1}}{N_{t+1}^{P} B_t}$$

➔ absolutes Rentenniveau konstant, relatives Rentenniveau sinkt

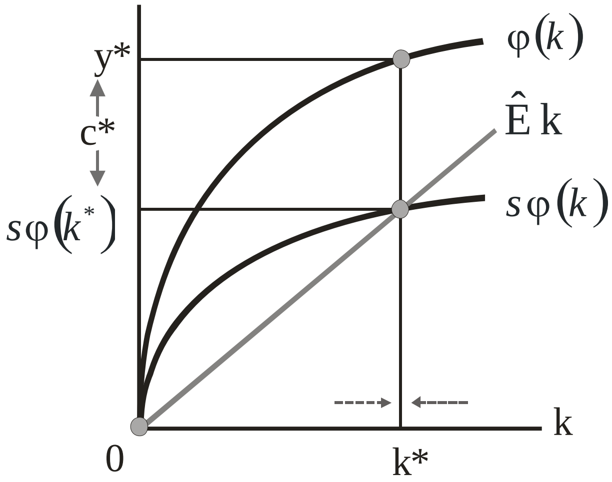
2) Anteil an Reallöhnen

$$1 + i_{t+1} = \frac{N_{t+1}^{y} w_{t+1}}{N_{t+1}^{P} w_t} = (1 + n)(1 + g)$$

➔ absolutes Rentenniveau steigt, relatives Rentenniveau konstant

Aufgabe 2: Interne Rendite vs. Kapitalmarkzins

a)



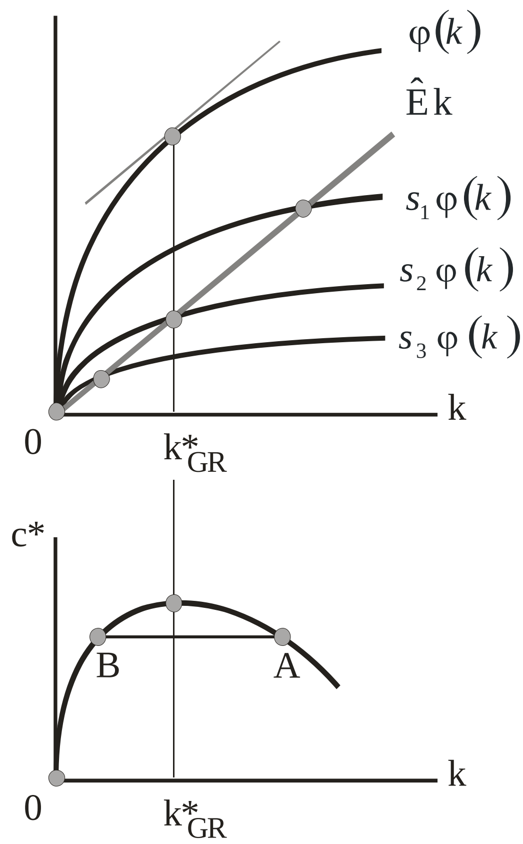
Wegen konstanter Skalenerträge: $Y = f(K, E)$ lässt sich schreiben als

$$\frac{f(K,E)}{E} = f(K/E,1) = \varphi(K/E) = \varphi(k)$$

Mit $E = A \cdot G$, wobei G: Stand des Wissens, A: Arbeiter → E: Menge der Arbeit in Effizienzeinheiten

$$\dot{k} = s \cdot \varphi(k) - \hat{E} \cdot k \text{ (im Gleichgewicht =0)}$$

Gesucht: Sparquote, die *c* maximiert (Golden Rule der Kapitalakkumulation)



d.h. GP des Kapitals, $\varphi_k = r$ gleich Wachstumsrate des Sozialprodukts $\hat{E} = n + g$

b) $f(k) = k^{2/3}$

SS: *Ersparnis = Abschreibung*

$s\, f(k) = sk^{2/3} = (n+g)k$

$k_{SS} = s^3 / (n+g)^3$

GR: *Grenzprodukt des Kapitals = Wachstumsrate des Sozialprodukts*

$f'(k) = {}^2/_3\, k^{-1/3} = n+g$

$k_{GR} = ({}^2/_3)^3\, (n+g)^{-3} = {}^8/_{27}\, (n+g)^{-3}$

c) *Sparquote maximal GR-Niveau:* *gesucht* s^{GR}

$$s^{GR} \cdot f\left(k^{GR}\right) = \hat{E} \cdot k^{GR} = (n+g) \cdot k^{GR}$$

$$s^{GR} \cdot \left[\frac{8}{27}\left(n+g\right)^{-3}\right]^{2/3} = \left(n+g\right)\frac{8}{27}\left(n+g\right)^{-3}$$

$$s^{GR} \cdot \frac{4}{9} \cdot \left(n+g\right)^{-2} = \frac{8}{27}\left(n+g\right)^{-2}$$

$$s^{GR} = \frac{2}{3}$$

d) *Wenn n sinkt und s konstant bleibt, steigt k. Wegen der Konkavität der Produktionsfunktion sinkt der Zins. Bei konstanter Sparquote steigt die Produktion pro Effizienzeinheit und damit der Konsum pro Effizienzeinheit und pro Kopf (weniger Abschreibung -> ich brauche weniger zu sparen -> ich kann mehr konsumieren).*
Es gibt keine Auswirkungen auf die Effizienz, da die optimale Sparquote (Golden Rule Niveau: $^2/_3$*) unabhängig von n ist.*